

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 28

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $(12 - 12 : 3) : 8$ este egal cu
- 5p 2. Un obiect costă 60 de lei. După o scumpire cu 10% , obiectul costă ... de lei.
- 5p 3. Cel mai mare număr din mulțimea $\{0, 1, -1, 4, -4\}$ este egal cu
- 5p 4. În triunghiul ABC cu $BC = 8\text{cm}$, punctul M este mijlocul laturii AB și punctul N este mijlocul laturii AC . Lungimea segmentului MN este egală cu ... cm .
- 5p 5. În *Figura 1* este reprezentată o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$ cu $AA' \perp (ABC)$. Unghiul dreptelor AA' și BC are măsura de ...° .

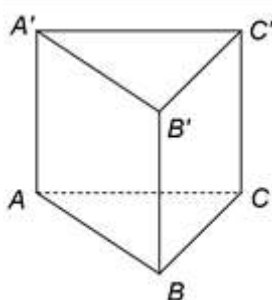


Figura 1

- 5p 6. În tabelul de mai jos este prezentată repartitia celor 1300 de elevi ai unui liceu în funcție de gruparea limbilor străine studiate. Fiecare elev studiază două limbi străine.

Limbile străine studiate	Engleză Franceză	Engleză Germană	Engleză Spaniolă	Franceză Germană	Franceză Spaniolă
Procent	60%	15%	10%	5%	

Conform informațiilor din tabel, numărul elevilor care studiază *Franceză Spaniolă* este egal cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un trapez isoscel $ABCD$ cu $AD = BC$.
- 5p 2. Calculați media geometrică a numerelor a și b , unde a este cel mai mare divizor comun al numerelor 25 și 105 , iar $b = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}$.
- 5p 3. Prețul unui obiect este de 400 de lei. După o reducere cu 10% din preț, urmează o nouă reducere cu 10% din noul preț. Calculați cu ce procent s-a micșorat prețul inițial al obiectului după cele două reduceri.
4. Se consideră numerele $x = \left(\sqrt{\frac{144}{25}} + \sqrt{16 - \sqrt{49}} \right) \cdot 5$ și $y = (\sqrt{48} + 3\sqrt{5})(4\sqrt{3} - \sqrt{45}) - (\sqrt{3} + 2) + \frac{6}{\sqrt{12}} - | -3 |$.
- 5p a) Arătați că $x = 27$.
- 5p b) Arătați că numărul $N = \sqrt{x + y}$ este natural.
- 5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (4x + 3)^2 - (3 - 4x)^2 + (2x - 1)(x - 5) - 2(x + 9)^2 + 160$, unde x este număr real. Arătați că $E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(10) = 85$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un triunghi isoscel ABC cu $AB = 12$ cm și $m(\angle BAC) = 120^\circ$. Punctul M este situat pe latura BC , astfel încât $AM \perp AB$.

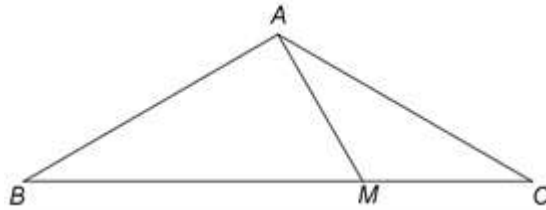


Figura 2

5p a) Arătați că măsura unghiului ABC este de 30° .

5p b) Calculați lungimea segmentului BM .

5p c) Demonstrați că $AC^2 = AM \cdot BC$.

2. În *Figura 3* este reprezentat un cub $ABCD A'B'C'D'$ cu $AB = 6$ cm. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD .

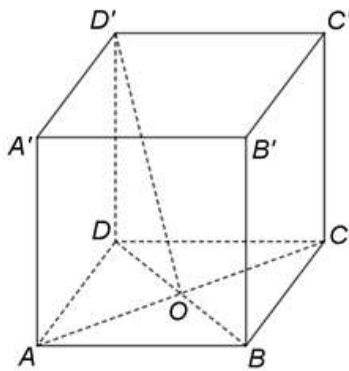


Figura 3

5p a) Arătați că aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu 36cm^2 .

5p b) Determinați măsura unghiului dreptelor $A'B$ și $D'O$.

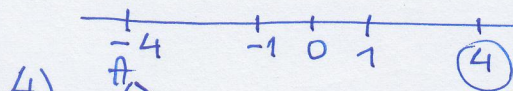
5p c) Se consideră punctul M , proiecția punctului D pe planul $(AD'C)$. Demonstrați că punctele D , M și B' sunt coliniare.

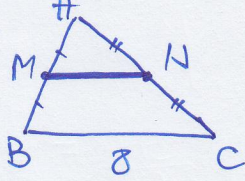
TESTUL 28: - REZOLVARE

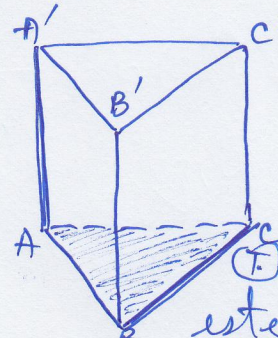
SUBIECTUL I: 1) $(12 - 12:3) : 8 = (12 - 4) : 8 = 8 : 8 = 1$;

2) $(110\% \text{ din } 60 \text{ lei}) = \frac{110}{100} \cdot 60 = 11 \cdot 6 = 66 \text{ (lei)}$.

3) $\{0; 1; -1; 4; -4\} \leftarrow$ Cel mai mare nr. dintre cele date este 4.



4)  $[MN]$ este linie mijlocie $\Rightarrow MN = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ (cm)}$.

5)  $AA' \perp (ABC)$
 $BC \subset (ABC) \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow$

$\rightarrow m(\widehat{AA'; BC}) = 90^\circ$.

O dreaptă perpendiculară pe plan este perpendiculară pe orice dr. din plan.

6) $60 + 15 + 10 + 5 = 90(\%)$; $100 - 90 = 10(\%)$.

Deci 10% din nr. elevilor studiază Franceză și Spaniolă.
 $(10\% \text{ din } 1300) = \frac{10}{100} \cdot 1300 = 130 \text{ (elevi)}$.

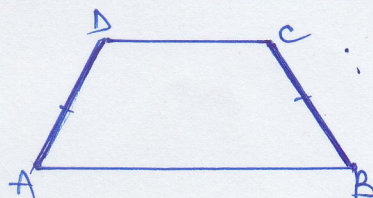
SUBIECTUL al II-lea: 1)

2) $m_g(a; b) = \sqrt{ab}$

$$25 = 5^2$$

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 105 \mid 3 \\ 35 \mid 5 \\ 7 \mid 7 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \mid 5 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \end{array}$$



Deci $a = 5$.

c.m.m.d.c = 5

(produsul factorilor comuni la puterea cea mai mică)

$$b = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{5} = \frac{5-1}{1 \cdot 5} = \frac{4}{5}; \text{ Deci } b = \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{l} 2) \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 \cdot 2} \\ 3) \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3} \\ 4) \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4} \\ 5) \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4 \cdot 5} \end{array}$$

[Obs: Încercați să-l calculați pe b și aducând cele 4 fracții la numitor comun, caue 60 ...].

$$m_g(a; b) = \sqrt{ab} = \sqrt{5 \cdot \frac{4}{5}} = \sqrt{4} = 2.$$

3) $[90\% \text{ din } (90\% \text{ din } 400)] = \frac{90}{100} \cdot \frac{90}{100} \cdot 400 = 81 \cdot 4 = 324 \text{ (lei)}$

$$(x\% \text{ din } 400) = 324 \Leftrightarrow \frac{x}{100} \cdot 400 = 324 \Leftrightarrow x = \frac{324}{4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 81(\%)$. $100\% - y\% = 81\% \Rightarrow y\% = 100\% - 81\% = 19\%$
 R: După cele 2 reduceri, prețul inițial o-a micșorat cu 19%.

$$4) a) x = \left(\frac{12}{5} + \sqrt{16-7} \right) \cdot 5 = \begin{cases} \sqrt{144} = 12 \\ \sqrt{25} = 5 \\ \sqrt{49} = 7 \end{cases} \\ = \left(\frac{12}{5} + \sqrt{9} \right) \cdot 5 = \left(\frac{12}{5} + 3 \right) \cdot 5 = \\ = \frac{12+15}{5} \cdot 5 = 27. \text{ Deci } \boxed{x=27}, \text{ g.e.d.}$$

$$b) y = (4\sqrt{3} + 3\sqrt{5})(4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) - (\sqrt{3} + 2) + \frac{6}{2\sqrt{3}} - 3 = \begin{cases} \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3} \\ \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5} \\ \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \\ | -3 | = 3 \end{cases} \\ = (4\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3} + 2) + \frac{3\sqrt{3}}{1} - 3 = \\ = 48 - 45 - (\sqrt{3} + 2) + \sqrt{3} - 3 = \\ = \cancel{3} - \cancel{\sqrt{3}} - 2 + \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{3} = -2, \text{ deci } \boxed{y=-2}$$

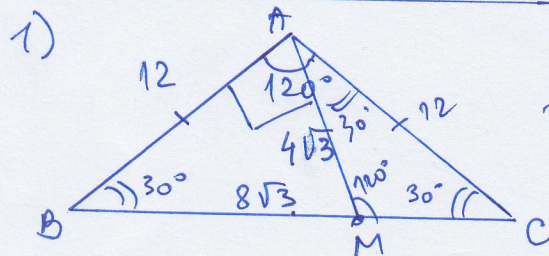
$$N = \sqrt{x+y} = \sqrt{27+(-2)} = \sqrt{27-2} = \sqrt{25} = 5 \quad \left. \begin{matrix} 5 \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Numărul N este natural, g.e.d.

$$5) E(x) = (4x+3)^2 - (3-4x)^2 + (2x-1)(x-5) - 2(x+9)^2 + 160, \quad x \in \mathbb{R} \\ E(x) = (16x^2 + 24x + 9) - (9 - 24x + 16x^2) + (2x^2 - 10x - x + 5) - \\ - 2(x^2 + 18x + 81) + 160 = \\ = \cancel{16x^2} + \cancel{24x} + \cancel{9} - \cancel{9} + \cancel{24x} - \cancel{16x^2} + \cancel{2x^2} - \cancel{11x} + \cancel{5} - \\ - \cancel{2x^2} - \cancel{36x} - \cancel{162} + \cancel{160} = \\ = x + 3. \text{ Deci } E(x) = x + 3, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

$$E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(10) = 4 + 5 + 6 + \dots + 13 = \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + 13) - (1 + 2 + 3) = \frac{13 \cdot 14}{2} - 6 = \\ = 91 - 6 = 85. \text{ Deci } E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(10) = 85, \\ \text{g.e.d.}$$

SUBIECTUL al III-lea:



$$a) m(\widehat{BAC}) = 120^\circ \Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{C}, \text{ deci baza } \\ \text{triunghiului este } [BC], \text{ deci } AB = AC = 12 \text{ cm} \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{BAC})}{2} = \\ = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ, \text{ g.e.d.}$$

(T): Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180° .

$$b) AM \perp AB \Rightarrow \triangle ABM: \text{dreptunghiuc în } \widehat{A}.$$

$$\cos \widehat{ABM} = \frac{AB}{BM} \Leftrightarrow \cos 30^\circ = \frac{12}{BM} \Rightarrow BM = \frac{12}{\cos 30^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ = 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ (cm.)}. \text{ Deci } BM = 8\sqrt{3} \text{ cm.}$$

c) $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ - m(\widehat{ABM}) = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (unghiurile ascuțite ale $\triangle ABM$ dreptunghic în $\widehat{A}$ sunt complementare).
Atunci $m(\widehat{AMC}) = 180^\circ - m(\widehat{AMB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ deoarece unghiurile $\widehat{AMB}$ și $\widehat{AMC}$ sunt suplementare.

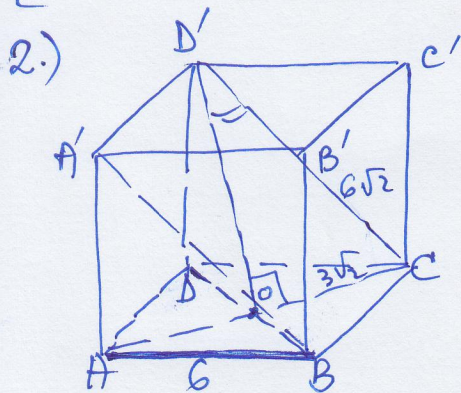
Dar $m(\widehat{C}) = m(\widehat{B}) = 30^\circ$. Atunci $\triangle MAC$ este isoscel, având, prin urmare, $MC = AM$ (1).

Observăm că $\triangle MAC \sim \triangle ABC$ (u.u.) $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC^2 = MC \cdot BC$$

$$\text{Dar } MC = AM \text{ (1)} \Rightarrow AC^2 = AM \cdot BC, \text{ g.e.d.}$$

Obs: Relația $AC^2 = AM \cdot BC$ putea fi demonstrată și prin calculul lungimilor segmentelor din relație, astfel:
 $AC = 12 \text{ cm (ip.)}$;
 Cu T.P. în $\triangle AMB \Rightarrow \dots \Rightarrow AM = 4\sqrt{3} \text{ cm} = MC$.
 $BC = MB + MC = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ (cm)}$
 $AC^2 = AM \cdot BC \Leftrightarrow 12^2 = 4\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} \Leftrightarrow 12^2 = 4 \cdot 3 \cdot 12 \text{ (A).}$



2.) a) $ABCD A'B'C'D'$: cub $\Rightarrow ABCD$: pătrat.

$$\left. \begin{array}{l} A_{\square} = a^2; \\ A_{ABCD} = AB^2 \\ AB = 6 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{ABCD} = 6^2 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}$$

b) $A'B$ și $D'O$: necoplanare
 $A'B \parallel D'C$ ($A'BCD'$: dreptunghi - suficient paralelogram)
 $\Rightarrow m(\widehat{A'B; D'O}) = m(\widehat{D'C; D'O}) = m(\widehat{OD'C})$.

$$DD' \perp (ABC)$$

$$DO \perp AC$$

(diag. pătratului sunt $\perp$.)

$$\left. \begin{array}{l} DD' \perp (ABC) \\ DO \perp AC \end{array} \right\} \text{T. 3. } \perp \Rightarrow D'O \perp AC \Rightarrow \triangle D'OC: \text{dreptunghic cu } m(\widehat{O}) = 90^\circ.$$

$$\text{Avem } OC = \frac{AC}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}; D'C = 6\sqrt{2} \text{ cm (diag. fetei)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{În } \triangle OCD': \sin(\widehat{OD'C}) = \frac{OC}{CD'} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\widehat{OD'C}) = 30^\circ.$$

$$\text{Deci } m(\widehat{A'B; D'O}) = 30^\circ.$$

c) $DA D'C$ este o prismă triunghi. regulată, cu muchiile $DA = DD' = DC = 6 \text{ cm}$ și baza $\triangle AD'C$ echilateral, cu laturile de $6\sqrt{2} \text{ cm}$.

Atunci proiecția lui D pe $(AD'C)$ va fi chiar centrul bazei, adică centrul $\triangle AD'C$ echilateral. Deci $M \in (D'O)$ și $MD' = 2 \cdot MO$, fiind totodată și centrul de greutate al $\triangle D'A'C$.

$B'AD'C$ este un tetraedru regulat, cu toate muchiile egale cu $6\sqrt{2}$ cm. $B'A = B'D' = B'C = 6\sqrt{2}$ (diagonale ale fețelor).
Deci și proiecția lui B' pe $(AD'C)$ va fi tot centrul bazei $\triangle AD'C$: echilateral, deci tot punctul M .

Prin urmare $DM \perp (AD'C)$

$B'M \perp (AD'C)$

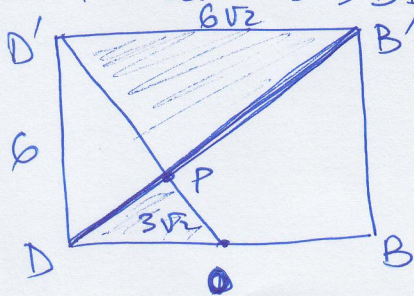
D și B' situate de o parte și de alta a pl. $(AD'C)$
(în hemispații opuse)

$\Rightarrow D, M, B'$: coliniare.
g.e.d.

Obs: Și de această dată putem demonstra coliniaritatea din calcule de lungimi de segmente, astfel:

M este, într-adevăr, centrul bazei piramidei regulate $DAD'C$, pentru că DM : înălțime $\Rightarrow DM$: centrul bazei, deci $\boxed{DM = 2MO}$.
($DM \perp (AD'C)$) (1)

Considerăm $D'DBB'$: secțiunea diagonală a cubului:



Notăm $\{P\} = D'O \cap DB'$. (E clar că D, P, B' : coliniare)

$\triangle POD \sim \triangle PD'B' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{PO}{PD'} = \frac{OD}{D'B'} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{D'P = 2 \cdot PO} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow M = P$, iar dacă am construit D, P, B' : coliniare, atunci și D, M, B' : coliniare, g.e.d.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 28

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	1	5p
2.	66	5p
3.	4	5p
4.	4	5p
5.	90	5p
6.	130	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează trapezul isoscel Notează trapezul isoscel $ABCD$ cu $AD = BC$	4p 1p
2.	Cum $25 = 5^2$ și $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow c.m.m.d.c.\{25, 105\} = 5$, deci $a = 5$ $b = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow m_g = \sqrt{ab} = \sqrt{5 \cdot \frac{4}{5}} = 2$	2p 3p
3.	Prețul după prima reducere este $400 - \frac{10}{100} \cdot 400 = 360$ de lei Prețul după a doua reducere este $360 - \frac{10}{100} \cdot 360 = 324$ lei, deci $\frac{p}{100} \cdot 400 = 400 - 324 \Rightarrow p = 19$, deci prețul inițial s-a micșorat cu 19%	2p 3p
4.	a) $x = \left(\frac{12}{5} + \sqrt{16-7}\right) \cdot 5 = \left(\frac{12}{5} + \sqrt{9}\right) \cdot 5 =$ $= 12 + 3 \cdot 5 = 27$	3p 2p
	b) $y = (\sqrt{48} + \sqrt{45})(\sqrt{48} - \sqrt{45}) - \sqrt{3} - 2 + \frac{6}{2\sqrt{3}} - 3 = 48 - 45 - \sqrt{3} - 5 + \sqrt{3} = -2$ $N = \sqrt{x+y} = \sqrt{27+(-2)} = \sqrt{25} = 5$, care este număr natural	3p 2p
5.	$E(x) = 16x^2 + 24x + 9 - 9 + 24x - 16x^2 + 2x^2 - 11x + 5 - 2x^2 - 36x - 162 + 160 = x + 3$, pentru orice număr real x $E(1) + E(2) + E(3) + \dots + E(10) = (1+2+3+\dots+10) + 3 \cdot 10 = 55 + 30 = 85$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\triangle ABC$ este isoscel, deci $m(\angle ABC) = \frac{180^\circ - m(\angle BAC)}{2} =$ $= \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$	3p 2p
----	---	----------

	b) $\triangle ABM$ este dreptunghic în $A \Rightarrow \cos(\sphericalangle ABM) = \frac{AB}{BM}$	2p
	$\cos 30^\circ = \frac{12}{BM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{BM}$, deci $BM = 8\sqrt{3} \text{ cm}$	3p
	c) $m(\sphericalangle MAC) = m(\sphericalangle BAC) - m(\sphericalangle BAM) = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ și, cum $\triangle ABC$ este isoscel, deci $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$, obținem că $\triangle ABC \sim \triangle MAC$	3p
	$\frac{AB}{MA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AM \cdot BC$ și, cum $AB = AC$, obținem $AC^2 = AM \cdot BC$	2p
2.	a) $ABCD$ este pătrat, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$	3p 2p
	b) $BC \parallel A'D'$ și $BC = A'D' \Rightarrow A'D'CB$ paralelogram, deci $A'B \parallel D'C$, de unde obținem că $m(\sphericalangle(A'B, D'O)) = m(\sphericalangle(D'C, D'O))$ $AC = 6\sqrt{2} \text{ cm}$, $D'C = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ și $AD' = 6\sqrt{2} \text{ cm} \Rightarrow \triangle D'AC$ echilateral și, cum O e mijlocul segmentului $AC \Rightarrow D'O$ este bisectoarea $\sphericalangle AD'C \Rightarrow m(\sphericalangle(D'C, D'O)) = m(\sphericalangle CD'O) = 30^\circ$	2p 3p
	c) $DA = DD' = DC$ și, cum $DM \perp (AD'C)$, $M \in (AD'C)$, $\triangle DMA$, $\triangle DMD'$ și $\triangle DMC$ sunt dreptunghice și au latura DM comună $\Rightarrow \triangle DMA \equiv \triangle DMD' \equiv \triangle DMC \Rightarrow AM = D'M = CM$, deci M este centrul cercului circumscris $\triangle D'AC$ $B'A = B'D' = B'C$ și, cum pentru $B'N \perp (AD'C)$, $N \in (AD'C)$, $\triangle B'NA$, $\triangle B'ND'$ și $\triangle B'NC$ sunt dreptunghice și au latura $B'N$ comună, obținem $\triangle B'NA \equiv \triangle B'ND' \equiv \triangle B'NC$, deci $AN = D'N = CN \Rightarrow N$ este centrul cercului circumscris $\triangle D'AC$, de unde obținem că $M = N$ și, cum $DM \perp (AD'C)$ și $B'N \perp (AD'C)$, punctele D , M și B' sunt coliniare	2p 3p